

第二十四届北京市大学生数学竞赛试卷(经济管理类)

考试时间: 2013 年 10 月 26 日上午 9:00 至 11:30 考试形式: 闭卷考试

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分									
评阅									
审核									

一、填空题(本题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设函数 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 则 $\varphi(x) =$ _____。
2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x + a, & 0 \leq x < 1 \\ 1 + b \sin(x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$ 在点 $x = 0, x = 1$ 处可导, 则参数 a 与 b 的和 $a + b =$ _____。
3. 设 $f(x) = e^{x^2} \sin x^4$, 则高阶导数 $f^{(2013)}(0) =$ _____。
4. 将函数 $f(x) = e^x$ 在区间 $[0, x]$ ($x > 0$) 上应用拉格朗日定理得 $e^x - 1 = xe^{\theta x}$ ($0 < \theta < 1$), 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta =$ _____。
5. 设函数 $f(x)$ 是一个非负连续函数, 且满足方程 $f(x)f(-x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$, 则定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + f(x)} dx =$ _____。
6. 二重积分 $I = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (4 - 5 \sin x + 3y) dx dy =$ _____。
7. 使得级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{n^2 + 1} - n)\pi}{n^x}$ 收敛的 x 的取值范围是 _____。
8. 若方程 $\Phi(x, y, z) = 0$ 可以确定隐函数 $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$, 那么乘积 $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} =$ _____。
9. 微分方程初值问题 $xy(1+x^2) \frac{dy}{dx} = 1+y^2, y(1) = 0$ 的解是 _____。
10. 已知 $df(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy$, 则 $f(x, y) =$ _____。

二、(本题 8 分) 试求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{a}{x+1} \right)$ 。

三、(本题 10 分) 设半径为 r 的圆与某条直线 ℓ 相切，切点为 O ，过圆上的一点 P 作切线 ℓ 的垂线，垂足为 Q 。试求由点 P 、 Q 及切点 O 所构成的三角形的最大面积。

答

勿

请

内

线

考

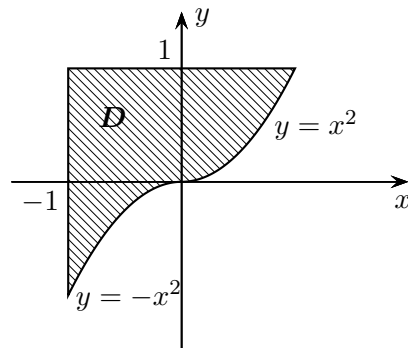
参

四、(本题 10 分) 试求函数 $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$, $x, y > 0$ 的极值。

题
答
勿
请
内
线
考
参

五、(本题 12 分) 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 的收敛性, 其中 $x > 0$ 。

六、(本题 10 分) 设 D 是由 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$), $y = -x^2$ ($-1 \leq x \leq 0$), $y = 1$ 以及 $x = -1$ 所围成的平面区域, 试求二重积分 $\iint_D x \left[1 + \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \sin(x^2 + y^2) \right] dx dy$ 。



七、(本题 8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(a) = 0$, 试证明:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| \, dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 \, dx$$

八、(本题 12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二次可导, 且 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 则

$$|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}, \quad x \in [0, 1]$$