

第二十四届北京市大学生数学竞赛试卷(经济管理类)

考试时间: 2013 年 10 月 26 日上午 9:00 至 11:30 考试形式: 闭卷考试

参考答案

一、填空题(本题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. 设函数 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 则 $\varphi(x) = \underline{\sqrt{\ln(1-x)}}$ 。
2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x + a, & 0 \leq x < 1 \\ 1 + b \sin(x-1), & x \geq 1 \end{cases}$ 在点 $x = 0, x = 1$ 处可导, 则参数 a 与 b 的和 $a + b = \underline{1}$ 。
3. 设 $f(x) = e^{x^2} \sin x^4$, 则高阶导数 $f^{(2013)}(0) = \underline{0}$ 。
4. 将函数 $f(x) = e^x$ 在区间 $[0, x]$ ($x > 0$) 上应用拉格朗日定理得 $e^x - 1 = xe^{\theta x}$ ($0 < \theta < 1$), 则极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta = \underline{\frac{1}{2}}$ 。
5. 设函数 $f(x)$ 是一个非负连续函数, 且满足方程 $f(x)f(-x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$, 则定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + f(x)} dx = \underline{1}$ 。
6. 二重积分 $I = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (4 - 5 \sin x + 3y) dx dy = \underline{4\pi a^2}$ 。
7. 使得级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{n^2 + 1} - n)\pi}{n^x}$ 收敛的 x 的取值范围是 $\underline{x > 0}$ 。
8. 若方程 $\Phi(x, y, z) = 0$ 可以确定隐函数 $x = x(y, z), y = y(x, z), z = z(x, y)$, 那么乘积 $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \underline{-1}$ 。
9. 微分方程初值问题 $xy(1+x^2) \frac{dy}{dx} = 1+y^2, y(1) = 0$ 的解是 $\underline{(1+x^2)(1+y^2) = 2x^2}$ 。
10. 已知 $df(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy$, 则 $f(x, y) = \underline{\frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + C}$ 。

二、(本题 8 分) 试求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{a}{x+1} \right)$ 。

解法一：使用拉格朗日中值定理：

$$\arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{a}{x+1} = \frac{1}{1+\xi^2} \left(\frac{a}{x} - \frac{a}{x+1} \right)$$

其中 ξ 介于 $\frac{a}{x}$ 与 $\frac{a}{x+1}$ 之间。因此，当 $x \rightarrow \infty$ 时， $\xi \rightarrow 0$ 。从而有

$$\text{原极限} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \frac{1}{1+\xi^2} \cdot \frac{a}{x(x+1)} = a$$

解法二：使用洛必达法则：

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{a}{x} - \arctan \frac{a}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2} - \frac{-\frac{a}{(x+1)^2}}{1 + \left(\frac{a}{x+1}\right)^2}}{-\frac{2}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{(x+1)^2 + a^2} - \frac{a}{x^2 + a^2}}{-\frac{2}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3}{2} \cdot \frac{2x+1}{(x^2+a^2)[(x+1)^2+a^2]} \\ &= a \end{aligned}$$

三、(本题 10 分) 设半径为 r 的圆与某条直线 ℓ 相切, 切点为 O , 过圆上的一点 P 作切线 ℓ 的垂线, 垂足为 Q 。试求由点 P 、 Q 及切点 O 所构成的三角形的最大面积。

解: 以切点 O 为原点, 切线 ℓ 为 x 轴建立如图所示的坐标系, 此时圆的方程为

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

设 P 点的坐标为 (x, y) , 则 $\triangle POQ$ 的面积为 $xy/2$ 。根据对称性, 只需讨论点 P 位于右半圆上即可。由于

$$x = \sqrt{2ry - y^2}, \quad 0 \leq y \leq 2r$$

于是, $\triangle POQ$ 的面积可表为 y 的函数 $f(y)$, 且有

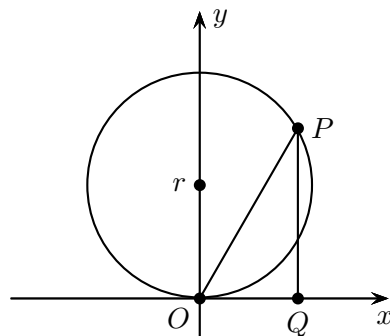
$$f(y) = \frac{y\sqrt{2ry - y^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2ry^3 - y^4}, \quad 0 \leq y \leq 2r$$

现求连续函数 $f(y)$ 在闭区间 $[0, 2r]$ 上的最大值。由

$$f'(y) = \frac{6ry^2 - 4y^3}{4\sqrt{2ry^3 - y^4}} = 0$$

可得驻点 $y = 3r/2$ 。又因 $f(0) = f(2r) = 0$, 所以函数 $f(y)$ 在区间 $[0, 2r]$ 上的最大值为

$$f(3r/2) = \frac{3\sqrt{3}}{8}r^2$$



四、(本题 10 分) 试求函数 $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$, $x, y > 0$ 的极值。

解: 先求函数 $f(x, y)$ 的一阶偏导数, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

然后令 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ 可解得 $x = y = \frac{1}{\sqrt{2e}}$ 。再求函数 $f(x, y)$ 的三个二阶偏导数, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ln(x^2 + y^2) + 2 - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{4x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

注意到

$$\begin{cases} A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=y=1/\sqrt{2e}} = 2 \\ B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{x=y=1/\sqrt{2e}} = 0 \\ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{x=y=1/\sqrt{2e}} = 2 \end{cases}$$

并且有

$$D = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$$

故函数 $f(x, y)$ 在点 $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ 处取得极小值, 且极小值为

$$\min_{x, y > 0} f(x, y) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = -\frac{1}{2e}$$

题

五、(本题 12 分) 判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ 的收敛性, 其中 $x > 0$ 。

解: 首先令

$$a_n(x) = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$$

注意到

答

$$\begin{aligned} a_n(x) &= \frac{(1+x^n) - 1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \\ &= \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})} - \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \end{aligned}$$

易知级数的前 n 项部分和 $S_n(x)$ 为

勿

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$$

根据上式, 当 $x > 1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 1$$

级数收敛; 当 $x = 1$ 时, 有

请

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 1$$

级数收敛; 而当 $0 < x < 1$ 时, 利用不等式 $e^t > 1+t$, $t > 0$ 可得

内

$$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n) < e^{x+x^2+\cdots+x^n} < e^{\frac{x}{1-x}}$$

因此极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$ 存在且为正值, 故极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$ 一定存在, 因此级数收敛。综上所述, 原级数收敛。

线

考

参

六、(本题 10 分) 设 D 是由 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$), $y = -x^2$ ($-1 \leq x \leq 0$), $y = 1$ 以及 $x = -1$ 所围成的平面区域, 试求二重积分 $\iint_D x \left[1 + \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \sin(x^2 + y^2) \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ 。

解: 引入如图所示的辅助线将区域 D 分为两个区域:

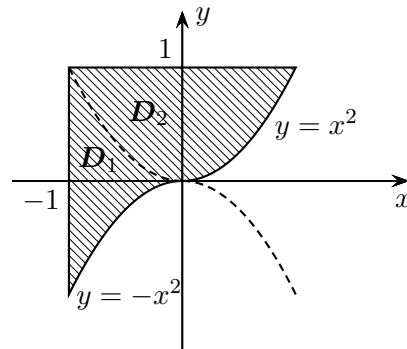
$$D_1: \begin{cases} -x^2 \leq y \leq x^2 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}, \quad D_2: \begin{cases} -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

注意到被积函数

$$f(x, y) = x \left[1 + \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \sin(x^2 + y^2) \right]$$

既是关于 x 的奇函数, 也是关于 y 的奇函数, 且区域

D_1 和 D_2 分别关于 x 轴和 y 轴对称, 所以有



$$\begin{aligned} & \iint_D x \left[1 + \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \sin(x^2 + y^2) \right] \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \iint_D x \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_{D_1} x \mathrm{d}x \mathrm{d}y + \iint_{D_2} x \mathrm{d}x \mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_1} x \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 2 \int_{-1}^0 \left(\int_0^{x^2} x \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= 2 \int_{-1}^0 x^3 \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

七、(本题 8 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(a) = 0$, 试证明:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)| \, dx \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 \, dx$$

证明: 注意到 $f(a) = 0$, 则有

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)f'(x)| \, dx &= \int_a^b \left| \int_a^x f'(t) \, dt \right| |f'(x)| \, dx \\ &= \int_a^b \left| \int_a^x f'(t) \, dt \right| \, dx \int_a^x |f'(t)| \, dt \\ &\leq \int_a^b \left[\int_a^x |f'(t)| \, dt \right] \, dx \left[\int_a^x |f'(t)| \, dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_a^x |f'(t)| \, dt \right]^2 \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_a^b 1 \cdot |f'(t)| \, dt \right]^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b 1^2 \, dt \cdot \int_a^b |f'(t)|^2 \, dt \quad (\text{Schwarz 不等式}) \\ &= \frac{b-a}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 \, dx \end{aligned}$$

八、(本题 12 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二次可导, 且 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, 则

$$|f'(x)| \leq 2a + \frac{b}{2}, \quad x \in [0, 1]$$

证明: 对 $\forall x \in (0, 1)$, 由泰勒公式可得

$$f(0) = f(x) + (0-x)f'(x) + \frac{(0-x)^2}{2}f''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (0, x)$$

$$f(1) = f(x) + (1-x)f'(x) + \frac{(1-x)^2}{2}f''(\xi_2), \quad \xi_2 \in (x, 1)$$

两式相减可得

$$f'(x) = f(1) - f(0) + \frac{x^2}{2}f''(\xi_1) - \frac{(1-x)^2}{2}f''(\xi_2)$$

两边取绝对值可得

$$\begin{aligned} |f'(x)| &\leq |f(1)| + |f(0)| + \frac{x^2}{2}|f''(\xi_1)| + \frac{(1-x)^2}{2}|f''(\xi_2)| \\ &\leq 2a + \left[\frac{x^2}{2} + \frac{(1-x)^2}{2} \right] b \\ &\leq 2a + \frac{b}{2} \end{aligned}$$

下面证明

$$|f'(0)| \leq 2a + \frac{b}{2}, \quad |f'(1)| \leq 2a + \frac{b}{2}$$

将 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处作泰勒展开, 得到

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(\eta), \quad \eta \in (0, x)$$

然后在上式中令 $x=1$ 得到

$$f'(0) = f(1) - f(0) - \frac{1}{2}f''(\eta), \quad \eta \in (0, x)$$

上式两边取绝对值, 并利用所给条件即得

$$|f'(0)| \leq 2a + \frac{b}{2}$$

不等式 $|f'(1)| \leq 2a + \frac{b}{2}$ 的证明是完全类似的, 此处从略。