

第二十四届北京市大学生数学竞赛暨高职高专类第四届竞赛试卷

考试时间：2013 年 10 月 26 日上午 9:00-11:30

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
分数										
评阅										
审核										

一、(本题共15分, 每小题3分)单项选择题(将正确答案的字母填在题后的括号内)

1. 半径为2的圆当半径增加0.1时, 面积的微分是【 】.

- (A) 以0.1为边长的正方形面积 (B) 以2为半径的圆弧长
 (C) 以 4π 为长, 0.1为宽的长方形面积
 (D) 内圆半径是2, 外圆半径是2.01的圆环面积

2. 若以下几个极限都存在, $h \neq 0$, 则极限为 $f'(x_0)$ 的是【 】.

- (A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0)}{h}$
 (C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0)}{h^2}$ (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h^3) - f(x_0)}{h^3}$

3. 以下各项正确的是【 】.

- (A) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx = 0$ (B) $\int_0^{\pi} \frac{x - \pi/2}{1 + \cos^2 x} dx = 0$
 (C) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0$ (D) 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上非负可积且不恒为零, 则 $\int_0^1 f(x) dx > 0$

4. 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 则 $f(x)$ 的值域为【 】.

- (A) 闭区间 (B) 开区间
 (C) 无穷区间 (D) 以上情况都有可能

5. 若 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上【 】.

- (A) 连续 (B) 有界
 (C) 可导 (D) 连续可导

二、(本题共15分, 每小题3分) 填空题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 若 $y = \frac{x^4}{1-x}$, 则 $y^{(10)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. $\int_{-1}^1 \left[\sqrt{1-x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right] dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设 $f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、(本题10分)

设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+10^{-1/x}}{2-10^{-1/x}}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$, 讨论 $f(x)$ 及 $f(|x|)$ 在 $x=0$ 的连续性.

四、(本题10分) 设 $p > 0$ ，常用下面的简便方法求 p 的算术平方根的近似值：任

取 $u_1 > 0$ ，令 $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{p}{u_n} \right)$ ($n=1, 2, \dots$)，证明 $\{u_n\}$ 收敛于 $\sqrt{p}$ 。

五、(本题10分) 汽车在某个只能通过一辆车的单行路上行驶，前后两车之间的安全距离 S (米) 与车的平均速 v (米/秒) 的之间关系为 $s = 18 + v + \frac{v^2}{32}$ ，求平均速度为多少时交通流量最大。

六、(本题10分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $c, d \in [a, b], t_1 > 0, t_2 > 0$, 证明存在

$\xi \in [a, b]$, 使得 $t_1 f(c) + t_2 f(d) = (t_1 + t_2) f(\xi)$.

七、(本题10分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $F(x) = \int_0^x (x-2t) f(t) dt$, 证明:

- (1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 也为偶函数;
- (2) 若 $f(x)$ 为单调减少函数, 则 $F(x)$ 为单调增加函数.

八、(本题10分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是正的可积函数, 证明存在 $\xi \in [a, b]$, 使得直线 $x = \xi$ 将由直线 $x = a, x = b, y = 0$ 和曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形分割为两个面积相等的小曲边梯形.

九、(本题10分) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 当 $x \geq 0$ 时有 $f(x)F(x) = \sin^2 x$, 并且 $F(0) = 1, F(x) \geq 0$, 求 $f(x)$.