

第二十四届北京市大学生数学竞赛暨高职高专类第四届竞赛试卷

参考答案

一、1. C; 2. D; 3. B; 4. A; 5. B

二、1. e ; 2. $1/2$; 3. $\frac{10!}{(1-x)^{11}}$; 4. $\frac{\pi}{2}$; 5. $\frac{e^{-1}-1}{2}$

三、(本题10分)

解: 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+10^{-1/x}}{2-10^{-1/x}} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+10^{-1/x}}{2-10^{-1/x}} = \frac{1}{2}$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续.(6分)

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(|x|) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(|x|) = \frac{1}{2}$, $f(|0|) = \frac{1}{2}$

所以 $f(|x|)$ 在 $x=0$ 连续.(10分)

四、(本题10分)

证: 因 $p > 0$, $u_1 > 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{p}{u_n} \right)$ ($n=1, 2, \dots$), 所以 $u_n > 0$ ($n=1, 2, \dots$)
.....(2分)

由平均值不等式, 当 $n \geq 2$ 时, $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{p}{u_n} \right) \geq \sqrt{p}$ (5分)

又 $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{u_n} - u_n \right) \leq \frac{1}{2} (\sqrt{p} - \sqrt{p}) = 0$,

所以 $\{u_n\}$ 单调减少有下界, 根据单调有界性定理, $\{u_n\}$ 收敛。

.....(8分)

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 则 $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{p}{a} \right)$, 解得 $a = \pm \sqrt{p}$, 而 $a = -\sqrt{p}$ 不合题意,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{p}$ (10分)

五、(本题10分)

解：设 y 表示1秒钟内通过某定点的汽车的数目，则 $y = \frac{v}{18+v+\frac{v^2}{32}}$
(4分)

因为 $y' = \frac{18 - \frac{v^2}{32}}{\left(18 + v + \frac{v^2}{32}\right)^2} = \frac{(24-v)(24+v)}{32\left(18 + v + \frac{v^2}{32}\right)^2}$ ，可得唯一驻点 $v=24$
(8分)

在 $v=24$ 左侧 $y' > 0$ ，在 $v=24$ 右侧 $y' < 0$ ，所以 $v=24$ 时汽车流量最大.

.....(10分)

六、(本题10分)

证明：由题意易知 $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上连续，因此 $f(x)$ 在 $[c, d]$ 上取最小值 m 和最大值 M ，
(3分)

且因为 $t_1 > 0, t_2 > 0$ ，所以 $0 < \frac{t_1}{t_1+t_2} < 1$ ， $0 < \frac{t_2}{t_1+t_2} < 1$ 于是

$$m \leq \frac{t_1}{t_1+t_2} f(c) + \frac{t_2}{t_1+t_2} f(d) \leq M \quad \text{.....(7分)}$$

根据介值定理，存在 $\xi \in [c, d] \subset [a, b]$ 使得 $f(\xi) = \frac{t_1}{t_1+t_2} f(c) + \frac{t_2}{t_1+t_2} f(d)$ ，即

$$t_1 f(c) + t_2 f(d) = (t_1 + t_2) f(\xi) \quad \text{.....(10分)}$$

七、(本题10分)

证明：(1) 因 $F(x) = \int_0^x (x-2t) f(t) dt$ ，则 $F(-x) = \int_0^{-x} (-x-2t) f(t) dt$
(2分)

令 $t = -z$ ，则

$$F(-x) = \int_0^x (-x+2z) f(-z)(-dz) = \int_0^x (x-2z) f(-z) dz$$

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $F(-x) = \int_0^x (x-2z) f(z) dz = F(x)$

即 $F(x)$ 为偶函数.(5分)

(2) 因为 $f(x)$ 连续, 所以 $F(x)$ 可导(6分)

$$\begin{aligned} \text{而 } F'(x) &= \left(x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x 2t f(t) dt \right)' = xf(x) + \int_0^x f(t) dt - 2x f(x) \\ &= \int_0^x f(t) dt - x f(x) = \int_0^x (f(t) - f(x)) dt \quad \dots\dots\dots(8\text{分}) \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 为减函数, 当 $x \geq 0$ 时, 故 $F'(x) = \int_0^x (f(t) - f(x)) dt \geq 0$,

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } F'(x) = \int_0^x (f(t) - f(x)) dt = -\int_x^0 (f(t) - f(x)) dt \geq 0$$

从而 $F(x)$ 为单调增加函数.(10分)

八、(本题10分)

证明: 设曲边梯形的面积为 $S(S \geq 0)$, 任取 $t \in [a, b]$, 直线 $x = t$ 将曲边梯形分割为

两个小曲边梯形, 记左边的小曲边梯形的面积为

$$S(t) = \int_a^t f(x) dx, \quad \dots\dots\dots(2\text{分})$$

因为 $f(x)$ 为正的可积函数, 则 $S(t)$ 为 $[a, b]$ 上连续函数,(5分)

由于 $S(a) = 0, S(b) = S$, 由介值定理, 存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $S(\xi) = \frac{1}{2}S$, 即

直线 $x = \xi$ 将由直线 $x = a, x = b, y = 0$ 和曲线 $y = f(x)$ 围成的曲边梯形分割为两个面积相等的小曲边梯形.(10分)

九、(本题10分)

解: 因 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 所以 $\int f(x) F(x) dx = \frac{1}{2} F^2(x) + C'$
.....(3分)

$$\text{又 } \int f(x) F(x) dx = \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C''$$

$$\text{于是得 } F^2(x) = x - \frac{\sin 2x}{2} + C$$

由 $F(0) = 1$ 得 $F^2(x) = x - \frac{\sin 2x}{2} + 1$, 而 $F(x) \geq 0$, 所以 $F(x) = \sqrt{x - \frac{\sin 2x}{2} + 1}$
.....(7分)

$$\text{于是 } f(x) = F'(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2 \sqrt{x - \frac{\sin 2x}{2} + 1}} = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x - \frac{\sin 2x}{2} + 1}} \quad \dots\dots\dots(10\text{分})$$